Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien

Aufgabe 1

Berechne jeweils a) $(-7)^2$ b) 3^{-2}

Aufgabe 2

Betrachtet wird die folgende Rechenanweisung: „Denke dir eine natürliche Zahl. Verdopple sie und subtrahiere vom Ergebnis 3. Multipliziere die Zahl, die du nach dieser Rechnung erhältst, mit 5 und addiere anschließend 15."

a) Jakob denkt sich die Zahl 9 und rechnet richtig. Gib sein Endergebnis an.

b) Stelle in Abhängigkeit von der gedachten Zahl n einen allgemeinen Term auf, der die Rechenanweisung beschreibt. Vereinfache anschließend deinen Term so weit wie möglich.

Aufgabe 3

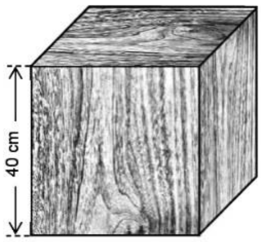
Bestimme für $x \in \mathbb{Q}$ die Lösung der Gleichung $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2} - x + 2x$

Aufgabe 4

Ein Würfel hat die Kantenlänge 40 cm.

a) Berechne das Volumen des Würfels in Litern.

Ein solcher Würfel wurde als Sitzhocker gebaut (vgl. Abbildung). Für die sechs Seitenflächen wurden 1 cm dicke Holzbretter verwendet. Innen ist der Sitzhocker hohl. Das Volumen des verbauten Holzes soll berechnet werden.



b) Ein korrekter Ansatz für die Berechnung ist $(40\text{cm})^3 - (40\text{ cm} - 2\text{cm})^3$. Gib die Bedeutung des Subtrahenden $(40\text{ cm} - 2\text{cm})^3$ an.

c) Der Ansatz $6 \cdot (40\text{cm})^2 \cdot 1\text{ cm}$ liefert einen Näherungswert für das Volumen des verbauten Holzes. Begründe ohne zu rechnen, dass dieser Näherungswert größer ist als der korrekte Wert.

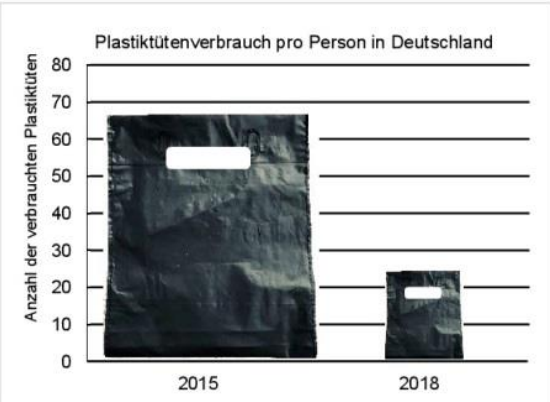
Aufgabe 5

Auf einer Party befinden sich m Mädchen und j Jungen, wobei die Anzahl der Jungen um 20% kleiner ist als die der Mädchen. Zwei der folgenden Gleichungen passen dazu. Kreuze (nur) diese an.

☐ $j = m - \frac{20}{100}$	☐ $m = j - \frac{20}{100}$	☐ $j = 0{,}8m$	☐ $m = 0{,}8j$
☐ $m = 20j$	☐ $j = 20m$	☐ $m = j - \frac{1}{5}j$	☐ $j = m - \frac{1}{5}m$

Aufgabe 6

a) Die Anzahl der in Deutschland pro Person verbrauchten Plastiktüten sank von 68 im Jahr 2015 auf 24 im Jahr 2018. Durch die Darstellung in der Abbildung könnte der Eindruck entstehen, dass die Anzahl der pro Person verbrauchten Plastiktüten deutlich stärker gesunken ist als dies tatsächlich der Fall war. Erläutere die Ursache für diesen Eindruck.

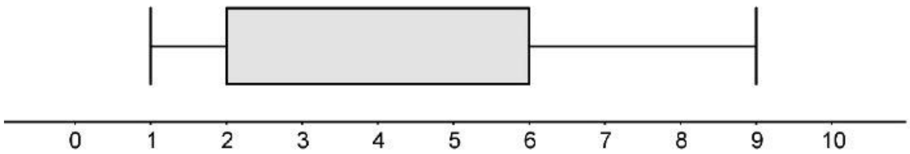


b) Im Jahr 2018 wurden in Deutschland etwa 2 Milliarden Plastiktüten verbraucht. Die Dicke der Folie, aus der die Tüten bestehen, beträgt durchschnittlich etwa 0,05 mm. In einem Gedankenexperiment werden all diese Tüten zu einem Stapel übereinandergelegt.
Schätze mit einer Rechnung die Höhe dieses Stapels ab. Gib dein Ergebnis in Kilometern an.

c) Durch das Verpackungsgesetz vom 01.01.2019 soll die Recyclingquote von Kunststoff-verpackungen, die in Privathaushalten anfallen, um 27 Prozentpunkte von 36 Prozent vor Inkrafttreten des Gesetzes auf 63 Prozent im Jahr 2022 ansteigen. Einer der folgenden Brüche ist gleich dem Prozentsatz, um den diese Recyclingquote ansteigen soll. Kreuze (nur) diesen an.

☐ $\frac{27}{36}$ ☐ $\frac{100}{36}$ ☐ $\frac{36}{63}$ ☐ $\frac{27}{63}$ ☐ $\frac{27}{100}$ ☐ $\frac{36}{100}$

Aufgabe 7
Folgender Datensatz soll in einem Boxplot dargestellt werden: 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 4; 4; 6; 6; 7; 9
Vervollständige den Boxplot durch Einzeichnen des fehlenden Medians.

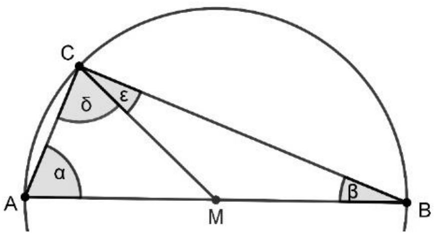


Aufgabe 8
Die Eckpunkte des Dreiecks ABC liegen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M auch der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist. Um zu beweisen, dass ein solches Dreieck bei C einen rechten Winkel hat, wird das Dreieck durch die Strecke $\overline{MC}$ in zwei Teildreiecke zerlegt.

a) Zunächst soll bewiesen werden, dass $\alpha = \delta$ (vgl. Abbildung). Dazu müssen die folgenden Aussagen in die richtige Reihenfolge gebracht werden.

I. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit Basis $\overline{AC}$.
II. A und C liegen auf einem Kreis um M.
III. $\alpha = \delta$
IV. $|\overline{AM}| = |\overline{CM}|$

☐ ⇒ ☐ ⇒ ☐ ⇒ III.



b) Ebenso lässt sich zeigen, dass $\beta = \varepsilon$ gilt.
Zeige, dass aus $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ mithilfe der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC folgt, dass $\delta + \varepsilon = 90°$gilt. Damit ist obige Aussage (Satz des Thales) bewiesen.

Punkteverteilung

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	4c	5	6a	6b	6c	7	8a	8b	
Punkte	1	1	1	2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1	2	**21**

Persönliche Kommentare

Allgemein
Über Sinn oder Unsinn des Bayerischen Mathematiktests lässt sich streiten. In der Regel findet keine schulische Nachbearbeitung statt. Stellt sich zum Beispiel heraus, dass ein Schüler noch Schwächen in der Bruchrechnung hat, erfolgt normalerweise keine Förderung dieses Schülers im Unterricht durch Wiederholungen der Bruchrechnung. Nutze du als Schüler die Erkenntnisse aus den Ergebnissen des Bayerischen Mathematiktests und ergänze dein Wissen.

zu Aufgabe 1 ✔
Es handelt sich um grundsätzliche Termumformungen. Es ist eine reine Algebra-Aufgabe wobei lediglich die Potenzgesetzte in Verbindung mit dem Minuszeichen zur Anwendung kommen. Absoluter Standard. Du solltest alle Algebra-Gesetze wissen und anwenden können.

zu Aufgabe 2
Eine „Übersetzungsaufgabe“ von Deutsch in die mathematische Sprache. Gleichzeitig sollten dir mathematischen Gesetze (Klammernregeln) bewusst sein.

zu Aufgabe 3 ✔
Relativ einfache Gleichung zu lösen.

zu Aufgabe 4
Teilaufgabe a) besteht aus der Volumenberechnung. Diese ist allerdings recht einfach. Deshalb wird als Ergänzung noch die Umrechnung innerhalb Maßeinheiten verlangt. Bei den Teilaufgaben b) und c) werden die Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, Mathematisch modellieren“ und „Kommunizieren“ geprüft. Das ist nicht ganz einfach. Jedenfalls anspruchsvoller als stures Rechnen.

zu Aufgabe 5
Verständnisaufgabe. Wie „modelliert“ man prozentuale Aussagen?

zu Aufgabe 6 ✔
Beliebte Aufgabe bzgl. der „mathematischen Argumentation“ am Beispiel von „falsch“ dargestellten Abbildungen. Kommt nahezu in jedem BMT dran. In Teilaufgabe b) muss wiederum mit großen Zahlen gerechnet werden. Auch Teilaufgabe c) bzgl. Prozentrechnung bei Prozentzahlen gehört zum Standard.

zu Aufgabe 7 ✔
Leichte Boxplotaufgabe. Dieser Aufgabentyp ist neu im LehrplanPLUS. Wichtig zu wissen, welche Parameter einer Datenerhebung bei der Zeichnung eines Boxplots benötigt werden.

zu Aufgabe 8
Diese Anwendungsaufgabe aus der Geometrie repräsentiert die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“. Die Lösungsschritte sind dabei aber schon aufgeführt und müssen in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Dadurch ist zumindest Teilaufgabe a) leicht lösbar. Teilaufgabe b) ist ein klassischer mathematischer Beweis. Solche Beweisführungen sollten aber im Unterricht besprochen worden sein.

Fazit
Dieser Test ist recht anspruchsvoll aber machbar. Wenige Standardaufgaben (A1 und A3)! Die anderen Aufgaben sind sehr abwechslungsreich, wohl nicht schwer. Man braucht aber dennoch mathematische „Einfälle“. Der Test wurde coronabedingt nicht bewertet.

Aufgabe 1

Berechne.

> *Hinweise und Tipps*
> - Denke an die „Multiplikationsregeln": „+" · „+" = „+" „+" · „–" = „–" „–" · „+" = „–" „–" · „–" = „+"
> - Denke an die „Potenzgesetze": hier $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = \mathbf{49}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

Aufgabe 2

Betrachtet wird die folgende Rechenanweisung: „Denke dir eine natürliche Zahl. Verdopple sie und subtrahiere vom Ergebnis 3. Multipliziere die Zahl, die du nach dieser Rechnung erhältst, mit 5 und addiere anschließend 15."

a) Jakob denkt sich die Zahl 9 und rechnet richtig. Gib sein Endergebnis an.

b) Stelle in Abhängigkeit von der gedachten Zahl n einen allgemeinen Term auf, der die Rechenanweisung beschreibt. Vereinfache anschließend deinen Term so weit wie möglich

> *Hinweise und Tipps*
> - (!) Da du das ganze Ergebnis mit 5 multiplizierst, muss $2n - 3$ in Klammern stehen
> - wenn Jakob die Zahl $n = 9$ betrachtet, dann liefert auch der Term aus Teilaufgabe b) das Endergebnis $10 \cdot 9 = 90$

Anweisung	*a)*	*b)*
gedachte Zahl	9	n
verdopple diese	18	2n
subtrahiere vom Ergebnis 3	$18 - 3 = 15$	$2n - 3$
Multipliziere die Zahl, die du nach dieser Rechnung erhältst mit 5	$15 \cdot 5 = 75$	$(2n - 3) \cdot 5$ (!)
addiere anschließend 15	$75 + 15 = \mathbf{90}$	$(2n - 3) \cdot 5 + 15 = 10n - 15 + 15 = \mathbf{10n}$

Aufgabe 3

Bestimme für $x \in \mathbb{Q}$ die Lösung der Gleichung $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2} - x + 2x$

$\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2} - x + 2x$ | vereinfachen

$\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2} + x$ | x-Werte auf die rechte Seite $\Rightarrow -\frac{1}{2}x$ auf beiden Seiten

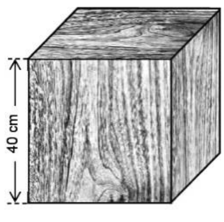
$-2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$ | reine Zahlen auf die linke Seite $\Rightarrow -\frac{1}{2}$ auf beiden Seiten

$-2{,}5 = \frac{1}{2}x$ | $\cdot (-2)$

$x = -5$ $\Rightarrow$ **$\mathbb{L} = \{-5\}$**

Aufgabe 4

Ein Würfel hat die Kantenlänge 40 cm. a) Berechne das Volumen des Würfels in Litern. Ein solcher Würfel wurde als Sitzhocker gebaut (vgl. Abbildung). Für die sechs Seitenflächen wurden 1 cm dicke Holzbretter verwendet. Innen ist der Sitzhocker hohl. Das Volumen des verbauten Holzes soll berechnet werden.



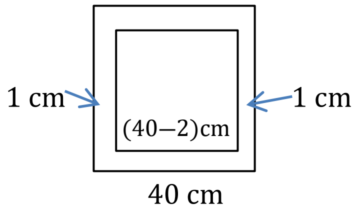
b) Ein korrekter Ansatz für die Berechnung ist $(40\text{cm})^3 - (40\text{ cm} - 2\text{cm})^3$. Gib die Bedeutung des Subtrahenden $(40\text{ cm} - 2\text{cm})^3$ an.

c) Der Ansatz $6 \cdot (40\text{cm})^2 \cdot 1\text{ cm}$ liefert einen Näherungswert für das Volumen des verbauten Holzes. Begründe ohne zu rechnen, dass dieser Näherungswert größer ist als der korrekte Wert.

a) $V = a \cdot a \cdot a = 40\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} = 64.000\text{ cm}^3 = \mathbf{64\ l}$

Hinweise und Tipps
Denke daran: $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$ und $1\text{ dm}^3 = 1.000\text{ cm}^3$

b) $(40\text{ cm} - 2\text{cm})^3$ ist das Volumen des ebenfalls würfelförmigen Hohlraumes.



c) Mit dem Ansatz $6 \cdot (40\text{cm})^2 \cdot 1\text{ cm} = 6 \cdot (40\text{cm})^3$ erhält man ein größeres Volumen, da die Volumenanteile an den Kanten (bzw.) Ecken mehrfach berücksichtigt werden. Zwei Seiten sind wohl 40 cm lang, aber die beiden anderen Seiten 38 cm lang.

Aufgabe 5
Auf einer Party befinden sich m Mädchen und j Jungen, wobei die Anzahl der Jungen um 20% kleiner ist als die der Mädchen. Zwei der folgenden Gleichungen passen dazu. Kreuze (nur) diese an.

- ☐ $j = m - \frac{20}{100}$
- ☐ $m = j - \frac{20}{100}$
- ☒ $j = 0{,}8m$
- ☐ $m = 0{,}8j$
- ☐ $m = 20j$
- ☐ $j = 20m$
- ☐ $m = j - \frac{1}{5}j$
- ☒ $j = m - \frac{1}{5}m$

Hinweise und Tipps
- Die ersten beiden Gleichungen sind absoluter Quatsch. $\frac{20}{100} = 0{,}8$. Die Anzahl muss immer eine natürliche Zahl sein.
- Die Gleichen $m = 20j$ und $j = 20m$ sind ebenfalls Nonsens. Das heißt doch, dass die Anzahl des einen Geschlechts das 20-fache des anderen Geschlechts ist.
- Bei den übrigen vier Gleichungen muss man genau die Fragestellung lesen.

Aufgabe 6
a) Die Anzahl der in Deutschland pro Person verbrauchten Plastiktüten sank von 68 im Jahr 2015 auf 24 im Jahr 2018. Durch die Darstellung in der Abbildung könnte der Eindruck entstehen, dass die Anzahl der pro Person verbrauchten Plastiktüten deutlich stärker gesunken ist als dies tatsächlich der Fall war. Erläutere die Ursache für diesen Eindruck.

Bei der Darstellung der kleinen Tüte wurde neben der Höhe auch die Breite verkleinert. Der geringere Verbrauch an Plastiktüten wurde durch die Verkleinerung der Höhe kenntlich gemacht, die Breite hätte gleich der Breite der ersten Tüte sein sollen.

Hinweise und Tipps
- Obige Darstellung des Säulendiagramms widerspricht einer maßgebenden Grundregel: Bei einem Säulendiagramm müssen die Breiten aller Säulen immer gleich lang sein.

b) Im Jahr 2018 wurden in Deutschland etwa 2 Milliarden Plastiktüten verbraucht. Die Dicke der Folie, aus der die Tüten bestehen, beträgt durchschnittlich etwa 0,05 mm. In einem Gedankenexperiment werden all diese Tüten zu einem Stapel übereinandergelegt.
Schätze mit einer Rechnung die Höhe dieses Stapels ab. Gib dein Ergebnis in Kilometern an.

Hinweise und Tipps

- Für eine Plastiktüte werden 2 Folien übereinandergelegt $\Longrightarrow$ Dicke $= 2 \cdot 0{,}05$ mm $= 0{,}1$ mm
- 2 Milliarden $= 2 \cdot 10^9$
- 1 m = 10 dm = 100 cm = 1.000 mm $\Longrightarrow$ 1 mm $= 10^{-3}$ m

Höhe $= 2 \cdot 10^9 \cdot 0{,}1$ mm $= 2 \cdot 10^8$ mm $= 2 \cdot 10^5$ m $= 2 \cdot 10^2$ km $=$ **200 km**

c) Durch das Verpackungsgesetz vom 01.01.2019 soll die Recyclingquote von Kunststoffverpackungen, die in Privathaushalten anfallen, um 27 Prozentpunkte von 36 Prozent vor Inkrafttreten des Gesetzes auf 63 Prozent im Jahr 2022 ansteigen. Einer der folgenden Brüche ist gleich dem Prozentsatz, um den diese Recyclingquote ansteigen soll. Kreuze (nur) diesen an.

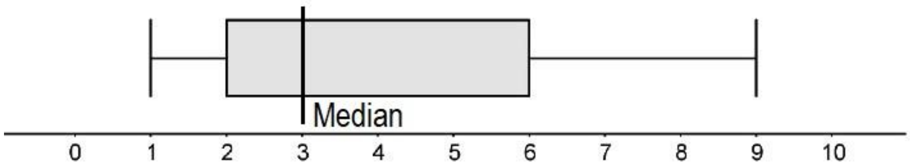
☒ $\frac{27}{36}$ ☐ $\frac{100}{36}$ ☐ $\frac{36}{63}$ ☐ $\frac{27}{63}$ ☐ $\frac{27}{100}$ ☐ $\frac{36}{100}$

Hinweise und Tipps

- Ausgangspunkt sind die 36 Anteile, also 100%. Der Anstieg sind dann 27 Einheiten.
  Mit dem Dreisatz: 36 ≙ 100%, 27 ≙ x $\Longrightarrow x = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{36}}$
- Lass dich nicht verwirren, dass Prozente von Prozenten ausgerechnet werden müssen. Einfacher wird es, wenn du von 36, bzw. 27, bzw. 63 Anteilen sprichst.

Aufgabe 7

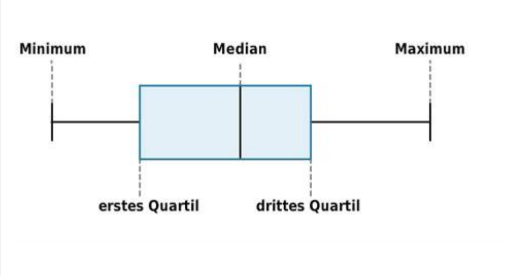
Folgender Datensatz soll in einem Boxplot dargestellt werden: 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 4; 4; 6; 6; 7; 9
Vervollständige den Boxplot durch Einzeichnen des fehlenden Medians.



Hinweise und Tipps

- Bestimmung Median: Daten sortieren. Das ist in dieser Aufgabe schon der Fall.
- Die Anzahl des Datensatz ist ungerade $\Longrightarrow$ Median ist die Zahl genau in der Mitte, also 3

Weitere Hinweise und Tipps

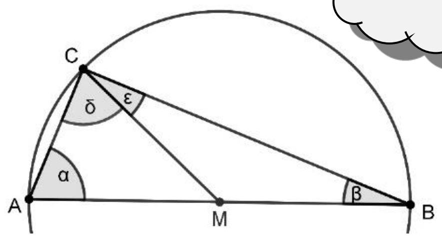


- Oft wird in Schulaufgaben verlangt, einen Boxplot zu zeichnen. Dazu musst du aus der gegebenen Zahlenreihe folgende Werte bestimmen:
  - Minimum und Maximum
  - erstes (unteres) und drittes (oberes) Quartil
  - Median
- Um diese Werte zu bestimmen muss die Zahlenreihe der Größe nach geordnet werden
- Die Box wird in beiden Richtungen durch Antennen bis zum kleinsten Wert und bis zum größten Wert verlängert
- Falls die Datenanzahl gerade ist $\Longrightarrow$ Median errechnet sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden mittleren Werte der geordneten Reihe

Lösung
BMT8
2021

Aufgabe 8

Die Eckpunkte des Dreiecks ABC liegen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M auch der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist. Um zu beweisen, dass ein solches Dreieck bei C einen rechten Winkel hat, wird das Dreieck durch die Strecke $\overline{MC}$ in zwei Teildreiecke zerlegt.



a) *Zunächst soll bewiesen werden, dass $\alpha = \delta$ (vgl. Abbildung). Dazu müssen die folgenden Aussagen in die richtige Reihenfolge gebracht werden.*

- *I. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig mit Basis $\overline{AC}$.*
- *II. A und C liegen auf einem Kreis um M.*
- *III. $\alpha = \delta$*
- *IV. $|\overline{AM}| = |\overline{CM}|$*

$\boxed{\text{II.}} \Rightarrow \boxed{\text{IV.}} \Rightarrow \boxed{\text{I.}} \Rightarrow \boxed{\textbf{III.}}$

Hinweise und Tipps

- Begonnen wird mit der Aussage II., dass A und C auf dem Kreis um M liegen
- Im Lösungsvorschlag des Kultusministeriums wird als nächster Schritt die Aussage IV. angeführt. Beide Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{CM}$ sind gleich lang. Diese Strecken sind Repräsentanten des Radius.
- Dann folgt zwingend, dass das Dreieck AMC gleichschenklig ist. (Aussage I.)
- Letztendlich gilt in gleichschenkligen Dreiecken, dass die beiden Basiswinkel gleich groß sind.
- Lösungen, bei denen die IV. und I. Aussage vertauscht wurden, sollten auch als „richtig“ anerkannt werden.

b) *Ebenso lässt sich zeigen, dass $\beta = \varepsilon$ gilt.*
Zeige, dass aus $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ mithilfe der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC folgt, dass $\delta + \varepsilon = 90°$ gilt. Damit ist obige Aussage (Satz des Thales) bewiesen.

- In einem Dreieck beträgt die Summe der Innwinkel 180° $\Rightarrow \alpha + \beta + \varepsilon + \delta = 180°$
- Wegen $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ $\Rightarrow 2\delta + 2\varepsilon = 180°$ (jetzt 2 ausklammern)
- $2\cdot(\delta + \varepsilon) = 180°$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\delta + \varepsilon = 90°}$

Punkte	21 - 16	15 - 13	12 - 10	9 - 7	6 - 4	3 - 0
Note	1	2	3	4	5	6